第六章 X 射线

6.1.The minimum wavelength of the continuous x-ray spectra from an x-ray tube is 0.124 $\mathring{A}$.What is its working potential?

某一 X 射线发出的连续 X 光谱的最短波长为 0.0124nm，它的工作电压是多少？

解：依据公式 $\lambda_{\min}=\dfrac{1.24}{V(kV)}nm$，得到工作电压为：$V=\dfrac{1.24}{\lambda_{\min}}nm=\dfrac{1.24}{0.0124}=100(kV)$

6.3.The L absorption edge of a neodymium atom(Z=60) is $1.9\mathring{A}$.How much work is required to ionize a K electron from a neodymium atom?

钕原子(Z=60)的 L 吸收限为 0.19nm，从钕原子中电离一个 K 电子需作多少功？

解：L 吸收限指的是在 L 层产生一个空穴需要能量，即电离一个 L 电子的能量：

$$\Delta E_L=E_\infty-E_L=h\nu_L=\frac{hc}{\lambda_L},(1)$$

K 吸收限是指在 K 层产生一个空穴需要能量,即电离一个 K 电子的能量：

$$\Delta E_K=E_\infty-E_k=h\nu_K=\frac{hc}{\lambda_K},(2)$$

式（1）代入式（2）有：$\Delta E_K=E_L-E_K+\dfrac{hc}{\lambda_L},(3)$

由莫塞莱公式有：$\Delta E_{K\alpha}=E_L-E_K=hRc(Z-1)^2\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right),(4)$

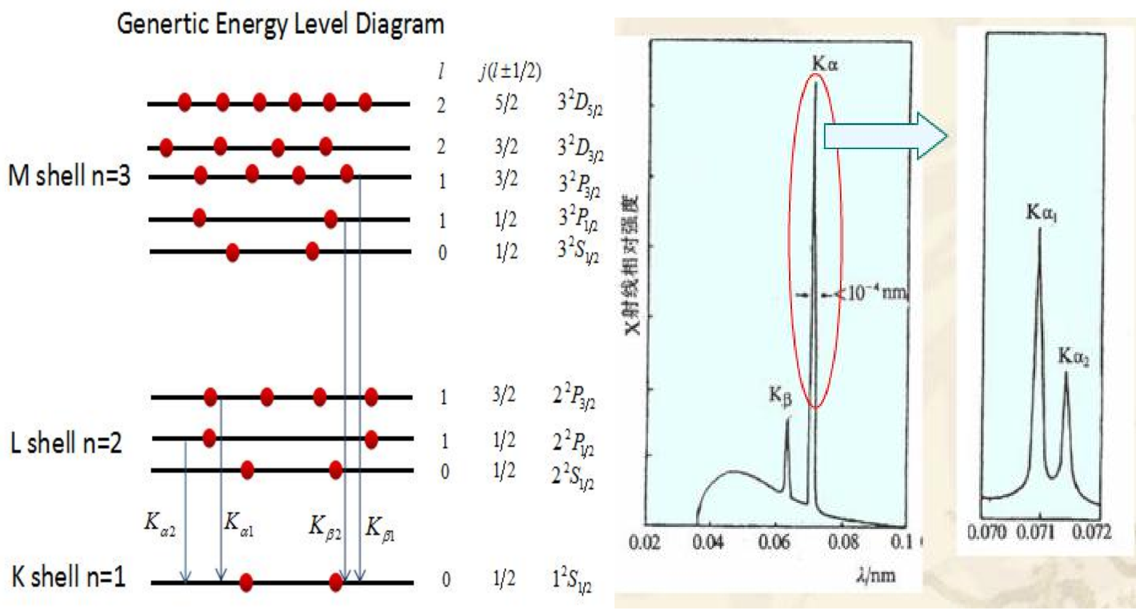
式（4）代入式（3）得电离一个 K 电子的能量为：

$$\Delta E_K=hRc(Z-1)^2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\frac{hc}{\lambda_L}\approx\frac{3}{4}\times13.6\times(60-1)^2+\frac{1.24\times10^3}{0.19}=42.0keV$$

6.5.Prove that for most of the elements,the intensities of the $K_{\alpha1}$ x-rays are double the intensities of the $K_{\alpha2}$ x-rays.

证明：对大多数元素，$K_{\alpha1}$射线的强度为$K_{\alpha2}$射线的两倍。

K 系激发机理：K 层电子被击出时，K 壳层形成空位，原子系统能量由基态升到 K 激发态，原子系统能量升高，使体系处于不稳定的激发态，按能量最低原理，L、M、N 层中的电子会跃迁到 K 层的空位，为保持体系能量平衡，在跃迁的同时，这些电子会将多余的能量以 X 射线光量子的形式释放。高能级电子向 K 层空位填充时产生 K 系辐射，L 层电子填充空位时，产生 K_α 辐射，M 层电子填充空位时产生 K_β 辐射。

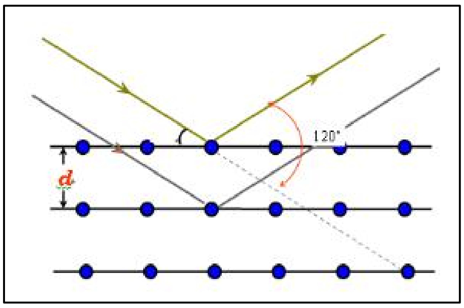


$$I_{K_{\alpha1}} : I_{K_{\alpha2}} = 2:1$$

6.7.A beam of monochromatic light with a wavelength of $5.4\mathring{A}$ is incident upon a set of crystal planes.At an angle of 120° with respect to the incident beam,a maximum first-order diffraction is observed.What is the spacing of the crystal planes?

一束波长为 0.54nm 的单色光入射到一组晶面上，在与入射束偏离为120°的方向上产生一级衍射极大，试问该晶面的间距为多大？

解：依据布拉格公式：



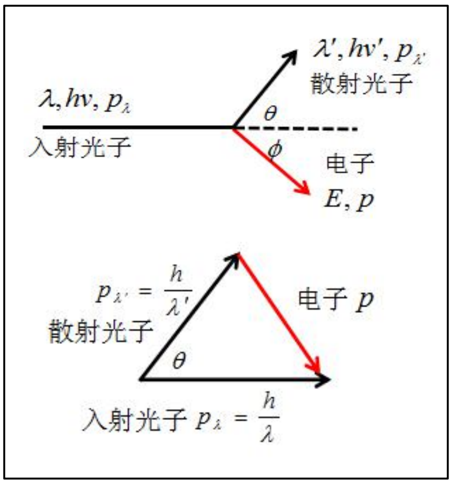
$$2d\sin\theta = n\lambda,$$

$$\theta = 60^\circ, n = 1, \lambda = 0.54nm$$

$$\to d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{0.54}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}nm = 0.312nm$$

6.8.In Compton scattering,show that $h\nu'_{\min} + E_{k,\max} = h\nu.$

证明：波长为λ的光子与原子中质量为m_0的自由静止电子碰撞，设碰撞前，入射光子能量为$h\nu$，动量为p_λ，碰撞后，散射光子能量为$h\nu'$，动量为$p_{\lambda'}$反冲电子的能量和动量为E, p。碰撞过程由能量，动量守恒有：



$$\begin{cases} h\nu + E_0 = h\nu' + E = h\nu' + E_k + E_0, (1) \\ p_{\lambda^2} + p_{\lambda'^2} - 2p_\lambda p_{\lambda'} \cos\theta = p^2, (2) \end{cases}$$

由相对论关系式：

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2, (3)$$

$$E_0 = m_0c^2, (4)$$

式（3），（4）代入式（1）有：

$$\left[h(\nu - \nu') + m_0c^2\right]^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2, (5)$$

由关系式 $p_\lambda = \frac{h}{\lambda}, p_{\lambda'} = \frac{h}{\lambda'}$，式（2）改写成：$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = p^2, (6)$

将式（6）代入式（5）得：

$$\left[h(\nu - \nu') + m_0c^2\right]^2 = \left[\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta\right]c^2 + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$= h^2\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta\right) + \left(m_0c^2\right)^2, (7)$$

式（7）左边：$\left[h(\nu - \nu') + m_0c^2\right]^2 = h^2\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\right) + \left(m_0c^2\right)^2 + 2hm_0c^2\left(\nu - \nu'\right), (8)$

化简（7），（8）得：

$$h^2\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\right) + \left(m_0c^2\right)^2 + 2hm_0c^2\left(\nu - \nu'\right) = h^2\left(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta\right) + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\to m_0c^2\left(\nu - \nu'\right) = h\nu\nu'\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\to \frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{h}{m_0c^2}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\to \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_0c^2}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\to \lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}\left(1 - \cos\theta\right), (9)$$ 著名的康普顿散射公式

式（9）可改写为：$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_0c^2}\left(1 - \cos\theta\right), (10)$

则可得到散射光子的能量表达式：$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \gamma\left(1 - \cos\theta\right)}, \gamma \equiv \frac{h\nu}{m_0c^2}, (11)$

因此当 $\theta = \pi$ 时，有 $h\nu'_{\min} = \frac{h\nu}{1 + 2\gamma}, (12)$

将式（11）代入式（1）得反冲电子的动能：

$$E_k = h\nu - h\nu' = h\nu\frac{\gamma\left(1 - \cos\theta\right)}{1 + \gamma\left(1 - \cos\theta\right)}, (13)$$

$$\because E_k = h\nu \frac{\gamma}{\frac{1}{1-\cos\theta}+\gamma} \therefore \theta = \pi\text{时}, \frac{1}{1-\cos\theta}\text{最小}, E_k\text{最大}$$

反冲电子能够得到的最大能量为 $E_{k,\max} = h\nu \frac{2\gamma}{1+2\gamma}, (14)$

因此由（12），（14）得：$h\nu'_{\min} + E_{k,\max} = h\nu, (15)$

证毕。

6.10.In Compton scattering,if the maximum energy which a photon could transfer to a rest electron is 10keV,what is the energy of incident photon?

在康普顿散射中，若一个光子能传递给一个静止电子的最大能量为 10keV，试求入射光子的能量。

解：反冲电子的动能为：$E_k = h\nu - h\nu' = h\nu \frac{\gamma(1-\cos\theta)}{1+\gamma(1-\cos\theta)}, \gamma \equiv \frac{h\nu}{m_0c^2}$

$$\because E_k = h\nu \frac{\gamma}{\frac{1}{1-\cos\theta}+\gamma} \therefore \theta = 180^\circ\text{时}, \frac{1}{1-\cos\theta}\text{最小}, E_k\text{最大}$$

$$\therefore E_{K_{\max}} = h\nu \frac{2\gamma}{1+2\gamma} = 10keV$$

$$\rightarrow (h\nu)^2 - 10h\nu - 5m_0e^2 = 0 \rightarrow h\nu = 56keV$$

6.13.Show that the collision of a photon with a free electron can never lead to a photo-electric effect because of the violation of conservation laws.证明：光子与自由电子相碰，不可能发生光电效应。

光电效应是指光子与原子内层的电子（束缚电子）碰撞后, 光子能量被电子全部吸收而变为光电子。光子和自由电子（外层电子）相互作用一般产生的是康普顿效应, 光子的部分能量传递给电子, 电子反冲, 光子散射. 体现了光的粒子性，证明如下：

假设光子与自由电子相碰，可以发生光电效应，则光子能量全部转移给自由电子，光子湮灭。碰撞前入射光子能量，动量为 $h\nu, \frac{h\nu}{c}$，静止的自由电子具有能量 E_0，碰撞后电子能量，动量为 E, p，由能量守恒有：$h\nu + E_0 = E = E_k + E_0, (1)$

由动量守恒有：$\frac{h\nu}{c} = p, (2)$，碰撞后电子的速度可接近光速，应用相对论关系式，

式（1），（2）可改写成：$h\nu = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2, \frac{h\nu}{c} = p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$(3)

因此可得到关系式: $E - E_0 = \sqrt{E^2 - E_0^2} \rightarrow \sqrt{E - E_0} = \sqrt{E + E_0}$,(4)

(4)式只有在 $E_0 = 0$ 时才成立，即 $m_0c^2 = 0$，而电子不可能具有非零的静质量，所有光子与自由电子相碰，不可能发生光电效应。

6.15.If the electronic state of palladium(Z=45) is
$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^8 5s^1$
(a)Determine the atomic term of its ground state.
(b)Use the Pd K_α x-ray for Compton scattering.When the scattered angle of the photon is 60° ,what is the energy of the recoiling electron(given that the shielding coefficient b of K_α is $b \simeq 0.9$)?
(c)In an experiment,lead with a thickness of 0.3cm is used to shield this x-ray.If we substitute aluminum for the lead,what thickness of aluminum is needed to achieve the same shielding effect?
($\mu_{Pb} = 52.5cm^{-1}, \mu_{Al} = 0.765cm^{-1}$.)
已知铑（Z=45）的电子组态为$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^8 5s^1$，
（a）确定它的基态态项（谱项）符号；
（b）用它的 K_α -X 射线作康普顿散射实验，当光子的散射角为60°时，求反冲电子的能量（已知 K_α 的屏蔽系数为$b \simeq 0.9$ ）；
（c）在实验装置中用厚为 0.30cm 的铅屏蔽该射线。如果改用铝代替铅，为达到同样的屏蔽效果，需要用厚度多少的铝？（ $\mu_{Pb} = 52.5cm^{-1}, \mu_{Al} = 0.765cm^{-1}$ ）
解: 电子组态中 $4d^8 5s^1$ 未填满，$4d^8 5s^1$ 与 $4d^2 5s^1$ 具有相同的原子态，对于 $4d^2 5s^1$，先计算两个同科 d 电子耦合，$l_1 = l_2 = 2, L = 4,3,2,1,0; s_1 = s_2 = 1/2, S = 0,1$
根据同科电子偶数规则，即 $L + S =$ 偶数
$S = 0, L = 0,2,4, J = 0,2,4$，对应原子态为：${}^1S_0, {}^1D_2, {}^1G_4$
$S = 1, L = 1, J = 2,1,0$，对应原子态为：${}^3P_{2,1,0}$
$S = 1, L = 3, J = 4,3,2$，对应原子态为：${}^3F_{4,3,2}$
依照洪特定则，基态为 ${}^3F_4$
再与 s 电子耦合，$l_1 = 3, l_2 = 0, L = 3; s_1 = 1, s_2 = 1/2, S = 3/2, 1/2, J = 9/2, 5/2$，

S	L	J	原子态
3/2	3	9/2	$^4F_{9/2}$
1/2	3	5/2	$^2F_{5/2}$

依照洪特定则，基态为$^4F_{9/2}$

（2）对于K_α线，由莫塞莱公式有，入射光子能量为：

$$\Delta E_{K_\alpha} = hRc\left(Z-b\right)^2\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \approx \frac{3}{4}\times 13.6\times\left(45-0.9\right)^2 eV = 19.84keV$$

在康普顿散射中，反冲电子的能量为：

$$E_k = h\nu\frac{\gamma\left(1-\cos\theta\right)}{1+\gamma\left(1-\cos\theta\right)}, \gamma \equiv \frac{h\nu}{m_0c^2}$$

$$\therefore E_k = 19.84\times\frac{\frac{19.84}{511}\left(1-\cos 60^\circ\right)}{1+\frac{19.84}{511}\left(1-\cos 60^\circ\right)} = 0.378keV$$

（3）依照朗伯-比耳定律，则有：

$$\left(I/I_0\right)_{P_b} = \left(I/I_0\right)_{Al} \to e^{-\mu_{Pb}x_{Pb}} = e^{-\mu_{Al}x_{Al}} \to \mu_{Pb}x_{Pb} = \mu_{Al}x_{Al}$$

$$\to x_{Al} = \frac{\mu_{Pb}}{\mu_{Al}}x_{Pb} = \frac{52.5}{0.765}\times 0.30cm = 21cm$$